

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение  
высшего образования

**«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**

**(Финансовый университет)**

**Краснодарский филиал Финуниверситета**

Кафедра «Математика и информатика»

СОГЛАСОВАНО

ООО «Портал-Юг»  
Генеральный директор



Е.В. Мостовой

«20» февраля 2025 г.

УТВЕРЖДАЮ

Краснодарский филиал  
Финуниверситета  
Директор



Э.В.Соболев

«20» февраля 2025 г.

Коренева О.В.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

студентов, обучающихся по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

в соответствии с образовательными стандартами Финансового университета  
(программа подготовки бакалавров)

*Рекомендовано Ученым советом Краснодарского филиала Финуниверситета  
(протокол № 24 от 18.02.2025)*

*Одобрено кафедрой «Математика и информатика»  
(протокол № 12 от 11.02.2025)*

**Краснодар 2025**

**УДК 517.98**  
**ББК 22.162**  
**К66**

Рецензент: А.П. Ануфриева кандидат экономических наук, старший преподаватель кафедры «Математика и информатика» Краснодарского филиала Финуниверситета.

Коренева О.В. Рабочая программа дисциплины функциональный анализ для обучающихся по направлению 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах». – Краснодар: Краснодарский филиал Финуниверситета, кафедра «Математика и информатика», 2025 г.

Дисциплина Функциональный анализ относится к Предпрофильному профессиональному циклу по направлению подготовки 01.03.02-Прикладная математика и информатика.

В рабочей программе дисциплины определены ее цель, требования к результатам освоения дисциплины, содержание программы, тематика аудиторных занятий, формы самостоятельной работы, оценочные средства для текущего контроля и промежуточной аттестации, учебно-методическое и информационное обеспечение.

Рабочая программа дисциплины функциональный анализ

*Формат 60\*90/16. Гарнитура Times New Roman*

*Усл. п.л. 2,0. Изд. № \_от.*

*Тираж 100 экз.*

*Заказ № .*

*Отпечатано в Краснодарском филиале Финуниверситета*

© Коренева О.В.  
© Краснодарский филиал Финуниверситета, 2025

## Содержание

|                                                                                                                                                                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Наименование дисциплины .....                                                                                                                                                                                | 4  |
| 2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине .....                      | 4  |
| 3. Место дисциплины в структуре образовательных программ .....                                                                                                                                                  | 4  |
| 4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся .....                                           | 4  |
| 5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий .....                                                         | 5  |
| 5.1. Содержание дисциплины .....                                                                                                                                                                                | 5  |
| 5.2. Учебно-тематический план .....                                                                                                                                                                             | 9  |
| 4.3. Содержание семинаров, практических занятий .....                                                                                                                                                           | 10 |
| 6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине .....                                                                                                         | 12 |
| 6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы .....                                                                                      | 12 |
| 6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю .....                                                                                                                                   | 14 |
| Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости .....                                                                                                                                    | 17 |
| 7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине .....                                                                                                               | 17 |
| 7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки индикаторов достижения компетенций, умений и знаний .....                                                                           | 17 |
| 7.2. Примеры практико-ориентированных (ситуационных) заданий .....                                                                                                                                              | 19 |
| 7.3. Примерные вопросы для подготовки к зачету .....                                                                                                                                                            | 20 |
| 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины .....                                                                                                             | 23 |
| 9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины .....                                                                                              | 23 |
| 10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины .....                                                                                                                                          | 24 |
| 11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем ..... | 24 |
| 12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине .....                                                                                          | 25 |

## 1.Наименование дисциплины

Дисциплина «Функциональный анализ»

## 2 Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине

Дисциплина «Функциональный анализ» обеспечивает инструментарий формирования следующих компетенций: ПКН-1.

| Код компетенции | Наименование компетенции                                                                                                                                                                                                   | Индикаторы достижения компетенции                                                                                                                               | Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции                                                                                                                                                               |
|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ПКН-1           | Способен собирать, анализировать и систематизировать данные современных научных исследований в области прикладной математики и информатики, требуемых для формирования заключений по соответствующим научным исследованиям | 1.Работает с источниками информации, выбирает и оценивает применимость полученной информации для решения поставленной научно-исследовательских задач            | <b>Знать:</b> основы математического моделирования с использованием функционального анализа;<br><b>Уметь:</b> применять математический Аппарат для формализации решаемых задач                                                                          |
|                 |                                                                                                                                                                                                                            | 2. Отбирает для решения исследовательской задачи математические методы и модели, осуществляет проверку адекватности моделей, анализ и интерпретацию результатов | <b>Знать:</b> методы функционального анализа и основные способы построения прикладных математических моделей;<br><b>Уметь:</b> применять методы функционального анализа при решении финансово-экономических задач методом математического моделирования |

## 3.Место дисциплины в структуре образовательных программ

Дисциплина «Функциональный анализ» относится к предпрофильному профессиональному циклу по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Изучение дисциплины «Функциональный анализ» базируется на знаниях, полученных в рамках курсов математического анализа, алгебры и геометрии, дифференциальных уравнений.

## 4.Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических

**часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и  
самостоятельной работы обучающихся**

**Очная форма обучения**

| <b>Вид учебной работы</b>                                  | <b>Часы:</b> |                      |
|------------------------------------------------------------|--------------|----------------------|
|                                                            | <b>Всего</b> | <b>Семестр<br/>7</b> |
| Общая трудоемкость дисциплины                              | 3/108        | 108                  |
| Контактная работа - Аудиторные занятия                     | 50           | 50                   |
| Лекции                                                     | 16           | 16                   |
| Семинарские занятия в т. ч. занятия в интерактивных формах | 34           | 34                   |
| Самостоятельная работа                                     | 58           | 58                   |
| Вид промежуточной аттестации                               | Зачет        | Зачет                |

**5.Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)  
дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов  
учебных занятий**

**5.1.Содержание дисциплины**

**Тема 1 – Множества, мера, измеримые функции, интеграл Лебега**

Операции над множествами. Последовательность множеств. Предел монотонной последовательности множеств. Верхний и нижний пределы последовательности множеств. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Отношение порядка. Максимальные элементы. Линейно упорядоченное подмножество. Верхняя грань. Мощность множества. Теорема о существовании инъекции. Линейный порядок на классе всех множеств, определяемый существованием инъекции. Теорема Кантора-Бернштейна о существовании биекции. Эквивалентность на классе всех множеств, определяемая существованием биекции. Теорема Кантора о мощности булеана. Континуум-гипотеза. Счетное множество, континуум, гиперконтинуум. Мощность счетного объединения счетных множеств. Мощность конечного и счетного произведения счетных множеств. Мощность счетного произведения континуумов. Мощности множеств целочисленных последовательностей, непрерывных числовых функций, всех числовых функций.

Мера. Пространство с мерой. Формула включения-исключения. Монотонность меры. Неравенства для меры. Конечная аддитивность, счетная полуаддитивность, счетная аддитивность. Непрерывность счетно-аддитивной меры. Мера верхнего и нижнего предела последовательности множеств. Неравенство для предела меры последовательности множеств. Мера Жордана. Элементарное по Жордану множество, его мера. Множества, измеримые по

Жордану. Множества жордановой меры нуль. Конечная аддитивность меры Жордана. Пример множества, неизмеримого по Жордану. Мера Лебега. Элементарное по Лебегу множество, его мера. Множества, измеримые по Лебегу. Множества лебеговой меры нуль. Счетная аддитивность меры Лебега. Пример множества, неизмеримого по Лебегу. Канторово множество.

Измеримые на конечном отрезке функции. Измеримость характеристической функции измеримого множества. Композиция непрерывной и измеримой функции. Понятие «почти всюду». Предел последовательности измеримых функций. Равномерная, поточечная сходимости и сходимость по мере. Интеграл от простой функции, интеграл от неотрицательной функции. Линейность, монотонность, конечная аддитивность, отсутствие счетной аддитивности интеграла. Теорема Леви о монотонной сходимости. Абсолютная непрерывность интеграла. Обобщенная производная. Теорема Лебега об ограниченной сходимости. Интегрируемость функции равносильна интегрируемости ее модуля. Интеграл от произвольной функции как предел интегралов от равномерно сходящейся последовательности простых функций. Сравнение интегрируемости по Риману и по Лебегу. Критерий Лебега интегрируемости по Риману. Несобственный интеграл Римана и интеграл Лебега. Вычисление интеграла Лебега сведением к интегралу Римана.

## **Тема 2 – Метрические пространства**

Метрика. Конструкции метрик. Примеры метрических пространств: пространство подмножеств прямой (метрика Хаусдорфа), конечномерное линейное пространство, пространства числовых последовательностей (их включения), пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций, пространства интегрируемых функций (их включения). Конечномерная, бесконечномерная, интегральная формы неравенств Коши-Буняковского, Гельдера, Минковского.

Неравенство многоугольника. Шар. Ограниченность множества. Предел последовательности точек. Внутренние, предельные, граничные, изолированные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Объединения и пересечения открытых и замкнутых множеств. Общий вид открытого множества на прямой. Замыкание. Замкнутый шар и замыкание шара. Примеры замыканий: пространство последовательностей как замыкание пространства финитных последовательностей, пространство непрерывных функций как замыкание подпространства многочленов (многочлены Бернштейна). Плотное и нигде не плотное подмножества. Примеры сепарабельных и несепарабельных пространств. Фундаментальная и сходящаяся последовательности. Полное пространство. Полнота подпространства полного пространства. Примеры полных пространств. Теорема о стягивающейся системе замкнутых шаров. Пополнение, примеры: пространство действительных чисел как пополнение пространства рациональных чисел, пространство интегрируемых по Лебегу функций как пополнение пространства непрерывных функций по интегральной метрике. Компактность множества и компактность пространства.

Ограниченность и замкнутость компактного множества, компактность в конечномерном пространстве. Критерий Хаусдорфа компактности метрического пространства. Примеры компактных множеств и пространств. Непрерывные отображения. Эквивалентные определения непрерывности отображения. Непрерывность метрики. Сжимающие отображения. Сжимающее линейное отображение в конечномерном пространстве. Теорема Банаха о неподвижной точке, примеры применения: теорема о неявной функции, теорема о существовании и единственности решения ОДУ I-го порядка. Вычислительные приложения теоремы Банаха: метод Ньютона приближенного решения системы уравнений. Теорема о неподвижной точке в компактном пространстве. Теорема Вейерштрасса (метрический вариант) о существовании и свойствах решений задачи оптимизации.

### **Тема 3 – Нормированные пространства**

Линейное пространство. Подпространство. Фактор-пространство. Линейная независимость множества векторов. Бесконечномерные пространства. Базис Гамеля, теоремы о существовании и мощности. Линейная размерность пространства. Норма. Метрика, порождаемая нормой. Банахово пространство, примеры. Замыкание подпространства есть подпространство. Преднорма. Подпространство векторов, на котором преднорма равна нулю. Преднорма как норма в фактор-пространстве. Введение нормы в пространствах интегрируемых функций. Непрерывность нормы. Эквивалентные нормы. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Примеры неэквивалентных норм в бесконечномерных пространствах. Сходимость ряда в банаховом пространстве. Признак абсолютной сходимости. Полная система векторов. Базис Шаудера, примеры. Пример полной системы векторов, не являющейся базисом.

### **Тема 4 – Евклидовы пространства**

Скалярное произведение. Норма, порождаемая скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертово пространство, примеры. Тожество параллелограмма как критерий порождаемости нормы скалярным произведением. Примеры норм, не порождаемых скалярным произведением. Угол между векторами. Ортогональность. Ортогонализация системы векторов. Пример ортогонализации: многочлены в пространстве квадратично интегрируемых функций. Непрерывность скалярного произведения. Ортогональное дополнение. Ортонормированная система векторов. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Полнота ортонормированной системы в сепарабельном пространстве. Ортонормированный базис, примеры.

### **Тема 5 – Линейные операторы и функционалы**

Линейный ограниченный оператор (функционал) в нормированных пространствах. Равносильность непрерывности и ограниченности. Пример неограниченного линейного оператора. Норма линейного оператора

(функционала). Норма оператора в конечномерном случае: матричные нормы. Вычисление нормы. Продолжение линейного оператора (функционала) по непрерывности. Теорема Хана-Банаха о продолжении ограниченного линейного функционала, заданного на подпространстве. Существование ненулевого ограниченного линейного функционала. Сопряженное пространство, примеры. Неравенства Юнга и Гельдера. Полнота сопряженного пространства. Теорема Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве. Обратное отображение. Линейность отображения, обратного к линейному. Открытое отображение. Линейный оператор как открытое отображение. Теорема Банаха об обратном операторе. Примеры обратных операторов. Сопряженный оператор в гильбертовых пространствах, его норма.

### **Тема 6 – Свойства функционалов**

Свойства функционалов в точке и на множестве в гильбертовом пространстве: непрерывность, полунепрерывность (снизу и сверху), выпуклость. Слабая и сильная сходимости последовательности, их взаимосвязь. Пример слабо, но не сильно сходящейся последовательности. Слабая непрерывность (слабая полунепрерывность), их связь с непрерывностью (полунепрерывностью). Теорема о

выпуклом, полунепрерывном снизу функционале. Полунепрерывность (слабая полунепрерывность) снизу суммы полунепрерывных (слабо полунепрерывных) снизу функционалов. Примеры линейного, квадратичных функционалов.

### **Тема 7 – Свойства множеств**

Понятия слабой замкнутости и слабой компактности множества в гильбертовом пространстве. Замкнутость слабо замкнутого множества. Сфера замкнута, но не слабо замкнута. Слабая компактность компактного множества. Шар слабо компактен, но не компактен. Слабая замкнутость и ограниченность слабо компактного множества. Понятия предкомпактности, слабой предкомпактности (ее эквивалентность ограниченности). Теорема Мазура, следствия: теорема о выпуклом, замкнутом множестве; теорема о выпуклом, замкнутом, ограниченном множестве в гильбертовом пространстве. Замкнутое подмножество компакта компактно, слабо замкнутое подмножество слабого компакта слабо компактно. Классические примеры: шар, сфера, гиперплоскость, полупространство, эллипсоид, «Гильбертов кирпич». Пересечение выпуклых множеств, пересечение замкнутых множеств. Примеры критериев компактности. Теорема Вейерштрасса (слабый вариант) о существовании и свойствах решений задачи оптимизации.

### **Тема 8 – Дифференцирование**

Определение дифференцируемости и (первой) производной Фреше для отображения, действующего в нормированных пространствах. Производная Фреше

для функционала в гильбертовом пространстве. Непрерывность, отсутствие слабой непрерывности, линейность, однозначность задания производной. Теорема о производной сложного отображения. Определение второй производной Фреше для отображения в нормированных пространствах и для функционала в гильбертовом пространстве. Непрерывность второй производной, формула Тейлора. Примеры линейного, квадратичных функционалов, степенной функции. Необходимые и достаточные условия локального экстремума для функционала, один либо два раза дифференцируемого по Фреше.

### **Тема 9 – Критерии выпуклости, сильной выпуклости**

Строгая выпуклость, сильная выпуклость с константой сильной выпуклости. Сильная выпуклость неотрицательной линейной комбинации сильно выпуклых функционалов. Критерии выпуклости, сильной выпуклости для функционалов, один либо два раза непрерывно дифференцируемых по Фреше. Примеры линейного, квадратичных функционалов, степенной функции. Теорема Вейерштрасса (сильно выпуклый вариант) о существовании и свойствах решений задачи оптимизации.

### **Тема 10 – Метрическая проекция**

Метрическая проекция на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве. Существование и единственность проекции, нестрогая сжимаемость оператора проектирования, характеристическое свойство проекции. Примеры проектирования на гиперплоскость, полупространство, слой, шар. Формула проектирования на замкнутое подпространство. Теорема о проектировании на пересечение типовых множеств.

### **Тема 11 – Критерии оптимальности в задачах оптимизации**

Необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче минимизации дифференцируемого функционала на выпуклом множестве. Пример решения задачи оптимального управления. Проекционная форма необходимых и достаточных условий оптимальности, пример решения задачи минимизации.

## **5.2. Учебно–тематический план**

### **Очная форма обучения**

| №<br>п/<br>п | Наименован<br>ие тем<br>(разделов)<br>дисциплин<br>ы     | Трудоемкость в часах |                                          |        |                                          |                                     | Формы<br>текущего<br>контроля<br>успеваемост<br>и                |
|--------------|----------------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------|--------|------------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
|              |                                                          | Всего                | Контактная работа -<br>Аудиторная работа |        |                                          | Самос-<br>тояте-<br>льная<br>работа |                                                                  |
|              |                                                          |                      | Общая,<br>в т.ч.:                        | Лекции | Семинары,<br>практичес<br>кие<br>занятия |                                     |                                                                  |
| 1.           | Множества,<br>мера,<br>измеримые<br>функции,<br>интеграл | 12                   | 6                                        | 3      | 3                                        | 6                                   | Самостоятель-<br>ные работы.<br>Решение задач<br>на практических |

|                       |                                              |     |    |    |    |    |                                                                                                    |
|-----------------------|----------------------------------------------|-----|----|----|----|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                       | Лебега                                       |     |    |    |    |    | занятиях.<br>Обсуждение домашних заданий.                                                          |
| 2.                    | Метрические пространства                     | 6   | 2  | 1  | 10 | 4  |                                                                                                    |
| 3.                    | Нормированные пространства                   | 7   | 2  | 1  | 1  | 5  |                                                                                                    |
| 4.                    | Евклидовы пространства                       | 14  | 7  | 1  | 1  | 7  |                                                                                                    |
| 5.                    | Линейные операторы и функционалы             | 8   | 3  | 1  | 5  | 5  | Самостоятельные работы.<br>Решение задач на практических занятиях.<br>Обсуждение домашних заданий. |
| 6.                    | Свойства функционалов                        | 8   | 4  | 2  | 2  | 4  |                                                                                                    |
| 7.                    | Свойства множеств                            | 9   | 4  | 2  | 2  | 5  |                                                                                                    |
| 8.                    | Дифференцирование                            | 16  | 10 | 2  | 3  | 6  |                                                                                                    |
| 9.                    | Критерии выпуклости, сильной выпуклости      | 7   | 2  | 1  | 5  | 5  |                                                                                                    |
| 10.                   | Метрическая проекция                         | 12  | 8  | 1  | 1  | 4  |                                                                                                    |
| 11.                   | Критерии оптимальности в задачах оптимизации | 9   | 2  | 1  | 1  | 7  |                                                                                                    |
| В целом по дисциплине |                                              | 108 | 50 | 16 | 34 | 58 | Согласно учебному плану:<br>контрольная работа                                                     |

#### 4.3.Содержание семинаров, практических занятий

| Наименование тем (разделов) дисциплины              | Перечень вопросов для обсуждения на семинарских, практических занятиях, рекомендуемые источники из разделов 8, 9 (указывается раздел и порядковый номер источника)    | Формы проведения занятий                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Множества, мера, измеримые функции, интеграл Лебега | Операции над множествами. Мощность множества. Мера Жордана. Мера Лебега. Канторово множество. Измеримые функции. Интеграл Лебега.<br>Рекомендуемые источники: п. 8, 9 | обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение |

|                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                     |
|----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                      | результатов                                                                                                                                         |
| Метрическое пространство         | Метрика. Конечномерная, бесконечномерная, интегральная формы неравенств Коши-Буняковского, Гельдера, Минковского. Теорема Банаха о неподвижной точке.<br>Рекомендуемые источники: п. 8, 9                                                                                            | обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов |
| Нормированные пространства       | Линейная независимость множества векторов. Введение нормы в пространствах интегрируемых функций. Непрерывность нормы. Банахово пространство, примеры.<br>Рекомендуемые источники: п. 8, 9                                                                                            | обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов |
| Евклидовы пространства           | Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертово пространство, примеры. Тожество параллелограмма. Непрерывность скалярного произведения. Примеры норм. Неравенство Бесселя.<br>Рекомендуемые источники: п. 8, 9                                                                            | обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов |
| Линейные операторы и функционалы | Линейный ограниченный оператор в нормированных пространствах. Равносильность непрерывности и ограниченности. Пример неограниченного оператора. Вычисление нормы. Теорема Банаха об обратном операторе, примеры. Сопряженный оператор, его норма.<br>Рекомендуемые источники: п. 8, 9 | обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов |
| Свойства функционалов            | Непрерывность, полунепрерывность, выпуклость. Слабая и сильная сходимости последовательности, Слабая непрерывность, полунепрерывность, примеры.<br>Рекомендуемые источники: п. 8, 9                                                                                                  | обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов |
| Свойства множеств                | Замкнутость, слабая замкнутость, компактность, слабая компактность, выпуклость, ограниченность в гильбертовом пространстве, примеры.<br>Рекомендуемые источники: п. 8, 9                                                                                                             | обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов |

|                                              |                                                                                                                                        |                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Дифференцирование                            | Первая, вторая производные Фреше, производная суперпозиции, примеры. Рекомендуемые источники: п. 8, 9                                  | обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов |
| Критерии выпуклости, сильной выпуклости      | Критерии выпуклости, сильной выпуклости для гладких, дважды гладких функционалов, примеры. Рекомендуемые источники: п. 8, 9            | обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов |
| Метрическая проекция                         | Свойства проекции, примеры проектирования на типовые множества. Рекомендуемые источники: п. 8, 9                                       | обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов |
| Критерии оптимальности в задачах оптимизации | Решение задач оптимального управления, выпуклых задач минимизации при помощи критериев оптимальности. Рекомендуемые источники: п. 8, 9 | обсуждение вопросов и решение задач в планах практических занятий; разбор домашних заданий; выполнение контрольных заданий и обсуждение результатов |

## 6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

### 6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы

| Наименование тем (разделов) дисциплины              | Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение                                                                                                                                                           | Формы внеаудиторной самостоятельной работы                                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Множества, мера, измеримые функции, интеграл Лебега | Мощность конечного и счетного произведения счетных множеств. Мощность счетного произведения континуумов. Мощности множеств целочисленных последовательностей, непрерывных числовых функций, всех числовых функций. | Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий. Работа с источниками и поиск информации в Интернете. |

|                                  |                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Метрические пространства         | Сжимающее линейное отображение в конечномерном пространстве. Вычислительные приложения теоремы Банаха: метод Ньютона приближенного решения системы уравнений. Теорема о неподвижной точке в компактном пространстве. | Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий. Работа с источниками и поиск информации в Интернете. |
| Нормированные пространства       | Эквивалентность норм в конечномерном пространстве.                                                                                                                                                                   | Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий.                                                      |
| Евклидовы пространства           | Пример ортогонализации: многочлены в пространстве квадратично интегрируемых функций.                                                                                                                                 | Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий.                                                      |
| Линейные операторы и функционалы | Открытое отображение. Линейный оператор как открытое отображение.                                                                                                                                                    | Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий. Работа с источниками и поиск информации в Интернете. |
| Свойства функционалов            | Полунепрерывность (слабая полунепрерывность) снизу суммы полунепрерывных (слабо полунепрерывных) снизу функционалов.                                                                                                 | Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий. Работа с источниками и поиск информации в Интернете. |
| Свойства множеств                | Классические примеры: шар, сфера, гиперплоскость, полупространство, эллипсоид, «Гильбертов кирпич». Пересечение выпуклых множеств, пересечение замкнутых множеств. Примеры критериев компактности.                   | Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий. Работа с источниками и поиск информации в Интернете. |
| Дифференцирование                | Непрерывность второй производной, формула Тейлора. Необходимые и достаточные условия локального экстремума для функционала, один либо два раза дифференцируемого по Фреше.                                           | Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий. Работа с                                             |

|                                              |                                                                                      |                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                              |                                                                                      | источниками и поиск информации в Интернете.                                                                                                                             |
| Критерии выпуклости, сильной выпуклости      | Сильная выпуклость неотрицательной линейной комбинации сильно выпуклых функционалов. | Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий. Работа с источниками и поиск информации в Интернете. |
| Метрическая проекция                         | Формула проектирования на замкнутое подпространство.                                 | Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий.                                                      |
| Критерии оптимальности в задачах оптимизации | Примеры решения задач минимизации.                                                   | Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий.                                                      |

## 6.2.Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

### Примерный перечень вопрос по контрольной работе

Метрическое пространство: основные свойства, примеры. Сходимость в метрическом пространстве; открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве; непрерывность;

полнота метрического пространства.

2. Определение и примеры топологического пространства. Основные понятия.

3. Хаусдорфовы, регулярные и нормальные топологические пространства.

4. Сходимость и непрерывность в топологическом пространстве.

5. Определение и примеры нормированного пространства. Банахово пространство.

6. Линейные оболочки в нормированном пространстве. Фактор-пространство.

7. Пространства последовательностей  $s$ ,  $l_\infty$ ,  $c_0$ ,  $c$ .

8. Неравенства Юнга, Гельдера и Минковского для последовательностей. Пространства  $l_p$ ,

$p \in [1, +\infty)$ .

9. Пространство ограниченных функций. Пространство ограниченных и

непрерывных функций.

10. Пространство дифференцируемых функций. Класс Шварца.
  11. Пространство голоморфных функций.
  12. Измеримые функции: определение, примеры, простейшие свойства.
  13. Пространство измеримых функций  $S(X, d\%)$ : определение, простейшие свойства, метрика, сходимости, полнота.
  14. Пространство  $L^\infty(X, d\%)$ .
  15. Интегральные неравенства Гельдера и Минковского, пространство  $L_p(X, d\%)$ ,  $p \in [1, +\infty)$ .
  16. Сепарабельность абстрактного метрического пространства (определение, признаки).
  17. Сепарабельность пространств  $K_d$ ,  $C_0$ ,  $C$  и  $L_p$ ,  $p \in [1, +\infty)$ . Сепарабельность  $C[a, b]$ . Несепарабельность пространства  $l_\infty$ .
  18. Сепарабельность пространства  $L_p$ ,  $p \in [1, +\infty)$ ; несепарабельность пространства  $L^\infty(0, 1)$ .
  19. Плотность  $C_0(\Omega)$  в  $L_p(\Omega)$ .
  20. Изоморфность метрических и нормированных пространств. Пополнение метрического и нормированного пространств (определение и единственность).
  21. Существование пополнения метрического пространства.
  22. Существование пополнения нормированного пространства.
  23. Лемма о вложенных шарах.
  24. Теорема Бэра-Хаусдорфа.
  25. Бикомпактность и секвенциальная компактность в топологическом пространстве.
  26. Бикомпактность и секвенциальная компактность в метрическом пространстве.
  27. Прекомпактность в метрических пространствах. Теорема Хаусдорфа.
  28. Прекомпактность в банаховых пространствах. Лемма о почти перпендикуляре. Непрекомпактность единичного шара в бесконечномерном банаховом пространстве.
  29. Простейшие признаки прекомпактности в абстрактном метрическом пространстве.
  30. Прекомпактность в  $C_0$ ,  $C$ ,  $l_p$  (теоремы типа Арцела).
  31. Прекомпактность в  $C[a, b]$  (теорема Арцела-Асколи).
  32. Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах.
- Пространство  $L(E, F)$ .
33. Банаховость пространства  $L(E, F)$ .

34. Распространение линейного ограниченного оператора по непрерывности.
35. Оператор умножения на функцию.
36. «Правильные» интегральные операторы. Лемма Шура. Операторы Гильберта-Шмидта.
37. Преобразование Фурье.
38. Принцип равномерной ограниченности (первый принцип функционального анализа).
39. Сильная сходимость. Теорема Банаха-Штейнгауза

### Примерные задания контрольной работы

1. Доказать, что оператор, отображающий линейное нормированное пространство  $X$  в фактор-пространство  $X/L$  ( $L$  — линейное пространство, замкнутое по норме  $X$ ) и ставящий в соответствие элементу  $x \in X$  содержащий его класс.
2. Пусть  $E_1$  и  $E_2$  — банаховы пространства. Пусть последовательность  $\{A_n\} \subset L(E_1, E_2)$  такова, что для любого  $x \in E_1$  последовательность  $\{A_n x\}$  фундаментальна в  $E_2$ . Доказать, что существует  $A \in L(E_1, E_2)$  такой, что  $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$  для любого  $x \in E_1$ . Доказать, что  $\|A\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|$ . Можно ли последнее неравенство заменить равенством?
3. Пусть  $X, Y$  — банаховы пространства,  $A_n \in L(X, Y)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;  $A_n x \rightarrow Ax$  на любом элементе  $x \in X$ . Доказать, что если  $x_n \rightarrow x$ , то  $A_n x_n \rightarrow Ax$ .
4. Пусть  $E$  — линейное пространство,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  — функционал, удовлетворяющий свойствам: а)  $f(x) > 0$  для всех  $x \in E$ ; б)  $f(x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ; в)  $f(\alpha x) = |\alpha|f(x)$  для всех  $x \in E$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; г) множество  $\{x \in E : f(x) \leq 1\}$  выпукло. Доказать, что  $f$  является нормой в пространстве  $E$ .
5. Пусть оператор  $I : l_1 \rightarrow l_2$  реализует естественное вложение  $l_1$  в  $l_2$ . Доказать, что  $I \in L(l_1, l_2)$ , но не имеет ограниченного обратного. Является ли пространство  $l_1$  с  $l_2$ -нормой банаховым?
6. Пусть  $X$  — банахово пространство,  $A \in L(X)$ . Доказать, что ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$  сходится в  $L(X)$  тогда и только тогда, когда для некоторого натурального  $k$  выполняется неравенство  $\|A^k\| < 1$ .

## Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости

Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости содержатся в соответствующих методических рекомендациях Краснодарского филиала Финуниверситета.

### 7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Перечень компетенций с указанием индикаторов их достижения в процессе освоения образовательной программы содержится в п.1. «Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине».

#### 7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки индикаторов достижения компетенций, умений и знаний

| Планируемые результаты освоения компетенции (индикатора достижения компетенции)                                                                                                                                                  | Уровень освоения                                                                                              |                                                                                                          |                                                                                                                                                 |                                                                                                                                | Оценочное средство                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                  | «неудовлетворительно»                                                                                         | «удовлетворительно»                                                                                      | «хорошо»                                                                                                                                        | «отлично»                                                                                                                      |                                                                                      |
| ПКН-1 Способен собирать, анализировать и систематизировать данные современных научных исследований в области прикладной математики и информатики, требуемых для формирования заключений по соответствующим научным исследованиям |                                                                                                               |                                                                                                          |                                                                                                                                                 |                                                                                                                                |                                                                                      |
| Работает с источниками информации, выбирает и оценивает применимость полученной информации для решения, поставленной научно-исследовательских задач                                                                              |                                                                                                               |                                                                                                          |                                                                                                                                                 |                                                                                                                                |                                                                                      |
| Знать:<br>- основы математического моделирования с использованием функционального анализа                                                                                                                                        | Фрагментарное представление об основах математического моделирования с использованием функционального анализа | Неполное представление об основах математического моделирования с использованием функционального анализа | Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления об основах математического моделирования с использованием функционального анализа | Сформированные систематические представления об основах математического моделирования с использованием функционального анализа | Вопросы для оценки знаний и умений, задания в виде расчетных задач, тестовые задания |

| Планируемые<br>результаты<br>освоения<br>компетенции<br>(индикатора<br>достижения<br>компетенции)                                                            | Уровень освоения                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                               | Оценочное<br>средство                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                              | «неудовлетв<br>орительно»                                                                                                                                                           | «удовлетво<br>рительно»                                                                                                                                      | «хорошо»                                                                                                                                                                                                         | «отлично»                                                                                                                                                                                     |                                                                                                           |
|                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                              | ьного<br>анализа                                                                                                                                                                                                 | анализа                                                                                                                                                                                       |                                                                                                           |
| Уметь:<br>– применять<br>математическ<br>ий аппарат<br>для<br>формализаци<br>и решаемых<br>задач                                                             | Фрагмента<br>рное<br>умение<br>применять<br>математич<br>еский<br>аппарат<br>для<br>формализа<br>ции<br>решаемых<br>задач на                                                        | Несистемат<br>ическое<br>применение<br>умений<br>применять<br>математичес<br>кий аппарат<br>для<br>формализац<br>ии<br>решаемых<br>задач                     | В целом<br>успешное,<br>но<br>содержащее<br>отдельные<br>пробелы<br>умение<br>применять<br>математичес<br>кий аппарат<br>для<br>формализац<br>ии<br>решаемых<br>задач<br>влияющие<br>на                          | Сформирова<br>нное умение<br>применять<br>математичес<br>кий аппарат<br>для<br>формализац<br>ии<br>решаемых<br>задач                                                                          | Вопросы для<br>оценки знаний<br>и умений,                                                                 |
| Отбирает для решения исследовательской задачи математические методы и модели, осуществляет проверку адекватности моделей, анализ и интерпретацию результатов |                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                               |                                                                                                           |
| Знать:<br>-методы<br>функциональ<br>ного анализа<br>и основные<br>способы<br>построения<br>прикладных<br>математичес<br>ких моделей                          | Фрагмента<br>рное<br>представле<br>ние о<br>методах<br>функциона<br>льного<br>анализа и<br>основные<br>способы<br>построени<br>я<br>прикладны<br>х<br>математич<br>еских<br>моделей | Неполные<br>представлен<br>ия о методах<br>функционал<br>ьного<br>анализа и<br>основные<br>способы<br>построения<br>прикладных<br>математичес<br>ких моделей | Сформирова<br>нные, но<br>содержащие<br>отдельные<br>пробелы<br>представлен<br>ия о методах<br>функционал<br>ьного<br>анализа и<br>основные<br>способы<br>построения<br>прикладных<br>математичес<br>ких моделей | Сформирова<br>нные<br>систематиче<br>ские<br>представлен<br>ия о методах<br>функционал<br>ьного<br>анализа и<br>основные<br>способы<br>построения<br>прикладных<br>математичес<br>ких моделей | Вопросы для<br>оценки знаний<br>и умений,<br>задания в виде<br>расчетных<br>задач,<br>тестовые<br>задания |
| Уметь:<br>-- применять<br>методы<br>функциональ                                                                                                              | Фрагмента<br>рное<br>умение<br>применять                                                                                                                                            | Несистемат<br>ическое<br>применение<br>умений                                                                                                                | В целом<br>успешное,<br>но<br>содержащее                                                                                                                                                                         | Сформирова<br>нное умение<br>применять<br>методы                                                                                                                                              | Вопросы для<br>оценки знаний<br>и умений,                                                                 |

| Планируемые<br>результаты<br>освоения<br>компетенции<br>(индикатора<br>достижения<br>компетенции) | Уровень освоения                                                                                               |                                                                                                                          |                                                                                                                                                   |                                                                                                         | Оценочное<br>средство |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
|                                                                                                   | «неудовлетворительно»                                                                                          | «удовлетворительно»                                                                                                      | «хорошо»                                                                                                                                          | «отлично»                                                                                               |                       |
| ного анализа при решении финансово-экономических задач методом математического моделирования      | методы функционального анализа при решении финансово-экономических задач методом математического моделирования | применять методы функционального анализа при решении финансово-экономических задач методом математического моделирования | отдельные пробелы умение применять методы функционального анализа при решении финансово-экономических задач методом математического моделирования | функционального анализа при решении финансово-экономических задач методом математического моделирования |                       |

## 7.2. Вопросы для оценки знаний и умений, характеризующих формирование компетенций

| Шифр компетенции | Вопросы                                                                                                                                                                            | Правильный ответ                   |
|------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| ПКН - 1          | 1. Что определяет выражение $\rho(x; y)$                                                                                                                                           | Метрика линейного пространства     |
|                  | 2. Выражение $\ x\ $ определяет...                                                                                                                                                 | Норму элемента                     |
|                  | 3. $\ker(f)$ это...                                                                                                                                                                | Ядро функционала                   |
|                  | 4. $\dim(L)$ определяет...                                                                                                                                                         | Размерность линейного пространства |
|                  | 5. Какое пространство задается формулой $C_0^\infty(R)$                                                                                                                            | Пространство пробных функций       |
|                  | 6. Бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами является...                                                                                | Счетным                            |
|                  | 7. Точной (наименьшей) верхней гранью (границей), или ... подмножества упорядоченного множества, называется наименьший элемент, который равен или больше всех элементов множества. | Супремумом                         |
|                  | 8. Какая операция задает множество $C$ , состоящее                                                                                                                                 | Объединение (сумма)                |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                            |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
|  | из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств $A$ или $B$ .                                                                                                                                                                                                                   |                            |
|  | 9. Некоторая числовая функция, ставящая в соответствие каждому множеству (из некоторого семейства множеств) некоторое неотрицательное число, есть...                                                                                                                                        | Мера множества             |
|  | 10. Какая характеристика множеств (в том числе бесконечных), обобщает понятие количества (числа) элементов конечного множества.                                                                                                                                                             | Мощность                   |
|  | 11. Если точка $x \in M$ вместе с некоторой своей окрестностью, то $x$ ...                                                                                                                                                                                                                  | Внутренняя точка множества |
|  | 12. Если множество целиком лежит в окрестности конечного радиуса некоторой точки $x_0$ , то это множество ...                                                                                                                                                                               | Ограниченно                |
|  | 13. Неравенство $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для всех $x, y, z \in X$ задает неравенство...                                                                                                                                                                                    | Треугольника               |
|  | 14. Неравенство $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$ для всех $x, y \in X$ задает неравенство...                                                                                                                                                 | Коши-Буняковского          |
|  | 15. Отображение $f: X \rightarrow Y$ в точке $x_0 \in X$ , при котором для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ , что для всех $x \in X$ удовлетворяющих условию $\rho_X(x, x_0) < \delta$ , выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ называется ... | Непрерывным                |
|  | 16. Множество, все точки которого внутренние ...                                                                                                                                                                                                                                            | Открытое                   |
|  | 17. Если для пары векторов $x, y$ , $(x, y) = 0$ , то векторы...                                                                                                                                                                                                                            | Ортогональны               |
|  | 18. Числовая функция $f: L \rightarrow R(C)$ на некотором линейном пространстве $L$ называется...                                                                                                                                                                                           | Функционалом               |
|  | 19. Если для функционала выполняется условие $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , то он...                                                                                                                                                                                                              | Аддитивный                 |
|  | 20. Всякий отрезок $[a; b] \subset R$ есть множество...                                                                                                                                                                                                                                     | Замкнутое                  |

### 7.3. Практико-ориентированные задания

| Шифр компетенции | Практико-ориентированные задания                                                                                                | Правильный ответ |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| ПКи-1            | 1. Найдите мощность множества всех непрерывных функций на $[a; b]$ .                                                            | С                |
|                  | 2. Будет ли измерима функция $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ на $[0; 1]$ ? В ответе напишите: Да или Нет.                             | Да               |
|                  | 3. Заданы два множества $A$ и $B$ . Определите множества $A \cap B$ , если $A = \{1, 5, 7, 9, 12\}$ $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$ . | $\{5, 7, 9\}$    |
|                  | 4. Заданы два множества $A$ и $B$ . Определите множества                                                                        | $\{1, 5, 7, 9,$  |

|  |                                                                                                                                                                   |              |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
|  | AUB если $A=\{1, 5, 7, 9, 12\}$ $B=\{5, 7, 9, 11, 13\}$ .                                                                                                         | 11, 12, 13}  |
|  | 5. Заданы два множества A и B. Определите множества, $A \Delta B$ , если $A=\{1, 5, 7, 9, 12\}$ $B=\{5, 7, 9, 11, 13\}$ .                                         | {1,11,12,13} |
|  | 6. Найдите расстояние между функциями $x(t) = t^3$ и $y(t) = -3t + 4$ в пространстве $C[0; 2]$ .                                                                  | 10           |
|  | 7. Найдите в замкнутом единичном шаре, точную верхнюю грань значений функционала: $l(y) = \int_0^{1/2} y(x)dx - \int_{1/2}^1 y(x)dx$ , в пространстве $C(0,1)$ .  | 1            |
|  | 8. Функция $f(x)$ нормированная на $[a, b]$ , если $\int_a^b f^2(x)dx$ равен?                                                                                     | 1            |
|  | 9. Найдите норму функционала $l(y) = \int_{-1}^1 tx(t)dt$ , $x \in C[-1; 1]$                                                                                      | 1            |
|  | 10. Найдите норму функционала $l(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ , в пространстве $C$ – сходящихся числовых последовательностей.                                           | 1            |
|  | 11. Вычислить $\ x\ $ в нормированном пространстве $X$ , если: $x(t) = \sqrt{t}$ , $x \in C[0; 1]$ .                                                              | 1            |
|  | 12. Найдите расстояние между функциями $x(t) = t^3$ и $y(t) = -3t + 4$ в пространстве $L_1[0, 2]$ .                                                               | 6,5          |
|  | 13. Найдите расстояние между функциями $x(t) = t^3$ и $y(t) = -3t + 4$ в пространстве $D^1[0, 2]$                                                                 | 15           |
|  | 14. Найдите меру плоского множества $\{(x, y) \in R^2: x < y < -x^2 + 2\}$                                                                                        | 4,5          |
|  | 15. Найдите меру плоского множества $\{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1\}$ . Считая $\pi=3$ .                                                   | 9            |
|  | 16. Найдите расстояние между точками $A_1(1;4)$ и $A_2(11;3)$ в метрике $\rho(A_1, A_2) = \{ x_1 - x_2 ,  y_1 - y_2 \}$ , где $A_1(x_1; y_1)$ , $A_2(x_2; y_2)$ . | 10           |
|  | 17. Найдите расстояние между комплексными числами $z_1=1+3i$ , $z_2=4-i$ в метрике $\rho(z_1, z_2) =  z_2 - z_1 $ .                                               | 5            |
|  | 18. Сколько прообразов имеет точка (16;81) при отображении $f: (x, y) \rightarrow (x^2, y^2)$ .                                                                   | 4            |

#### 7.4 Тесты

| Шифр компетенции | Тестовые задания                                                                                                                                                                                                                    | Правильный ответ |
|------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| ПКН - 1          | 1. Какие из функций являются метрикой на прямой<br>1). $\rho(x; y) =  \sin(x - y) $ ;                      2). $\rho(x; y) =  y - x  \cdot (x^2 + 5y^2)$ ;<br>3). $\rho(x; y) =  \sin x - \sin y $ 4). $\rho(x; y) =  \cos(x - y) $ | 2                |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 2. Какие точки интервала (1; 3] являются внутренними?<br>1) 1 и 3    2) 2 и 3    3) 1    4) 3                                                                                                                                                                                                                    | 3 |
| 3. Свойство $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$ это...<br>1) свойство метрики    3) свойство скалярного произведения<br>2) свойство нормы    4) свойство функционала                                                                                                                                                    | 3 |
| 4. Евклидово пространство можно превратить в нормированное, определив норму с помощью формулы:<br>1) $\ x\  = (x, x)$ ;    2) $\ x\  = \sqrt{(x, x)}$ ;<br>3) $\ x\  = (x, x)^2$ ;    4) $\ x\  = \ (x, x)^2\ $ .                                                                                                | 2 |
| 5. Если $f(x)=0$ , то...<br>1) функционал $f$ называется нулевым<br>2) функционал $f$ тождественно равен нулю<br>3) элемент $x$ является ядром функционала $f$<br>4) элемент $x$ входит в ядро функционала $f$                                                                                                   | 4 |
| 6. Образ линейного оператора $A: X \rightarrow Y$ это...<br>1) множество $X$ 2) множество $Y$<br>3) $D(A)$ 4) все те $y$ из $Y$ , для которых $y=Ax$ , $x \in D(A)$                                                                                                                                              | 4 |
| 7. Найдите расстояние между функциями $f(x) = x^2$ и $g(x) = 2x + 3$ в пространстве $C_1[0; \frac{7}{2}]$ .<br>1) 4;    2) 5,25;    3) 5;    4) 0,75.                                                                                                                                                            | 2 |
| 8. Какое из высказываний верно «если $A \setminus B \sim B \setminus A$ , то ...».<br>1) множество $A$ не эквивалентно множеству $B$ ;<br>2) множество $A$ равно множеству $B$ ;<br>3) множество $A$ эквивалентно множеству $B$ ;<br>4) множество $A$ превосходит множество $B$ .                                | 3 |
| 9. Угол между элементами $x, y$ вещественного гильбертова пространства вычисляется по формуле:<br>1) $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\ x\  \cdot \ y\ }$ 2) $\sin \varphi = \frac{(x, y)}{\ x\  \cdot \ y\ }$<br>3) $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\ x\  + \ y\ }$ 4) $\sin \varphi = \frac{(x, y)}{\ x\  + \ y\ }$ | 1 |
| 10. Укажите количество неподвижных точек заданного отображения $f(x) = 2 - x^2 - \ln x$ числовой прямой в себя:<br>1) нет точек; 2) ноль; 3) один; 4) два.                                                                                                                                                       | 3 |
| 11. Последовательность функций $x_n(t) = t^n$ , в пространстве $C[0,1]$ , сходится к функции $(t)$ , равной:<br>1) 0; 2) $\frac{n}{n+1}$ ; 3) $\frac{1}{n}$ ; 4) 1.                                                                                                                                              | 4 |
| 12. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n, f)$ и определить сходится ли последовательность функций $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$ к функции $f(x) \equiv 0$ в пространстве $C_1[0,1]$ .<br>1) $-\infty$ ; нет; 2) $+\infty$ ; да; 3) 0; да; 4) 0; нет.                                                  | 3 |

## **8.Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### **Основная литература:**

1. Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2020. – 482 с. – ЭБС Университетская библиотека ONLINE. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=571413> (дата обращения: 19.01.2025). – Текст : электронный.
2. Функциональный анализ : учебное пособие / В. И. Белоусова, А. А. Кныш, К. С. Поторочина [и др.]. — Екатеринбург : УрГЭУ, 2023. — 88 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/417821> (дата обращения: 19.01.2025).
3. Елецких, И. А. Элементы функционального анализа: учебно-методическое пособие / И. А. Елецких, К. С. Елецких. — Елец : ЕГУ им. И.А. Бунина, 2023. — 105 с. — ISBN 978-5-00151-348-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/393269> (дата обращения: 19.01.2025).

### **Дополнительная литература:**

4. Дерр, В. Я. Функциональный анализ (с упражнениями и решениями). : учебное пособие / В. Я. Дерр. — Москва : КноРус, 2024. — 510 с. — ЭБС BOOK.ru. — URL:<https://book.ru/book/947268> (дата обращения: 19.01.2025). — Текст : электронный.
5. Власова, Е. А. Элементы функционального анализа : учебное пособие / Е. А. Власова, И. К. Марчевский. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 400 с. — ISBN 978-5-8114-1958-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/212189> (дата обращения: 19.01.2025).

## **9.Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. Личный кабинет обучающегося <https://org.fa.ru>
2. Электронная библиотека Финансового университета (ЭБ) <http://elib.fa.ru/>
3. Электронно-библиотечная система BOOK.RU <http://www.book.ru>
4. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека ОНЛАЙН» <http://biblioclub.ru/>
5. Электронно-библиотечная система Znanium <http://www.znanium.com>
6. Электронно-библиотечная система издательства «ЮРАЙТ» <https://urait.ru/>
7. Электронно-библиотечная система издательства Проспект

<http://ebs.prospekt.org/books>

8. Электронно-библиотечная система издательства «Лань»  
<https://e.lanbook.com/>
9. Деловая онлайн-библиотека Alpina Digital <http://lib.alpinadigital.ru/>
10. Научная электронная библиотека eLibrary.ru <http://elibrary.ru>
11. Национальная электронная библиотека <http://нэб.рф/>
12. СПАРК <https://spark-interfax.ru/>
13. Academic Reference <http://ar.cnki.net/ACADREF>
14. Электронная коллекция книг издательства Springer: Springer eBooks  
<http://link.springer.com/>

## **10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

При изучении теоретического материала необходимо опираться на рабочую программу дисциплины, материалы лекций и литературу из основного списка. Кроме этого, необходимо активно работать с Интернет-источниками и пособиями других авторов, помогающими усвоить материал отдельных разделов программы.

Необходимо конспектировать лекции, помечая сложные и непонятные моменты с тем, чтобы задать вопросы лектору в конце лекции или же на консультации.

При подготовке к семинарским занятиям необходимо изучить вопросы, вынесенные на самостоятельное изучение, так как семинарские занятия предполагают их обсуждение и дискуссию по теме; кроме того, задания для самостоятельной работы необходимы для того, чтобы успешно выполнить самостоятельные задания на семинарах.

Индивидуальные задания для работы на компьютере, файлы с выполненными заданиями необходимо хранить в личной сетевой папке в компьютерной сети вуза.

## **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем**

- 11.1. Комплект лицензионного программного обеспечения:
  1. Пакет офисных программ
  2. Антивирус Kaspersky
- 11.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы
  1. Информационно-правовая система «Гарант»
  2. Информационно-правовая система «Консультант Плюс»
  3. Электронная энциклопедия: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Wiki>
  4. Система комплексного раскрытия информации «СКРИН» -

<http://www.skrin.ru/>

11.3. Сертифицированные программные и аппаратные средства защиты информации

- не используются

## **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Для освоения дисциплины возможно использование вычислительных средств –компьютер, смартфон или планшет, в качестве дополнительных инструментов организации и осуществления образовательного процесса.